Annexe n° 1 : Trajectoires elliptiques

Des différentes définitions de l'ellipse, nous allons donner la plus simple, celle parfois utilisée par les jardiniers pour tracer le pourtour d'un parterre elliptique. Vous pouvez d'ailleurs faire la manipulation vous-même : il suffit de disposer d'une feuille de papier fixée sur une planche en bois, de deux épingles ou punaises, d'un peu de fil à coudre et d'un crayon de faible diamètre.

Nous donnerons ensuite une autre méthode de construction de l'ellipse, un peu moins simple mais plus utilisée en astronomie.

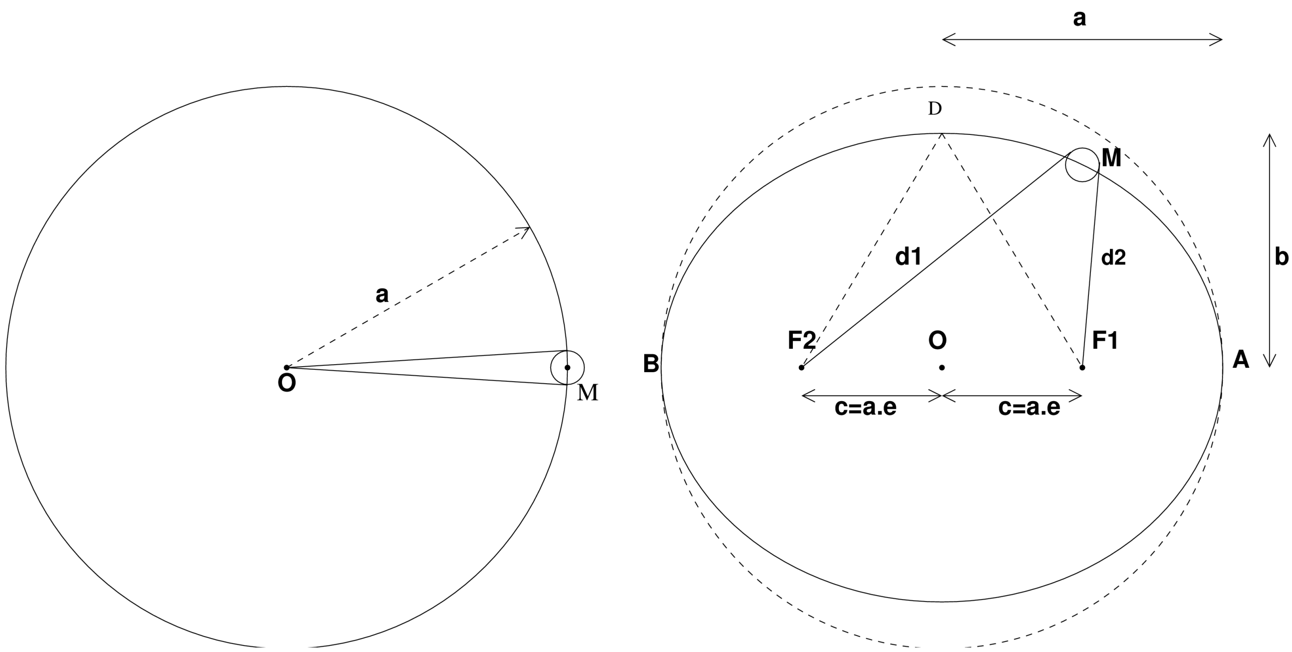


schéma n° 1

Dans un premier temps, attachez les deux extrémités de votre fil à une épingle que vous plantez, matérialisant ainsi un point fixe noté O. Placez votre crayon dans la boucle que forme le fil et tournez autour du point O en maintenant le fil constamment tendu. Vous obtenez ainsi un cercle de centre O et de rayon de valeur a (figure de gauche).

Maintenant, enlevez l'épingle du point O et placez deux épingles de part et d'autre du point O, à la même distance c du point O en choisissant c strictement inférieur à a. En conservant au fil la même longueur que précédemment, attachez une extrémité à la première épingle et l'autre extrémité à la seconde épingle. Comme précédemment, placez votre crayon dans la boucle que forme le fil et tournez autour du point O en maintenant le fil constamment tendu. Vous obtenez une ellipse (figure de droite). Les points fixes matérialisés par les épingles (F_1 et F_2 sur la figures) sont les **foyers** de l'ellipse. Soit d_1 la distance de la pointe M du crayon à F_1 et d_2 la distance de M à F_2. Nous avons évidemment, quelle que soit la position de M sur l'ellipse : $d_1 + d_2 = 2.a$.

D'où une définition précise d'une ellipse : ***soient deux points fixes de l'espace appelés foyers et un plan fixe contenant ces deux points ; l'ellipse est l'ensemble des points de ce plan dont la somme des distances aux deux foyers est une constante.***

La distance de F_1 à F_2 (égale à 2c) est nécessairement inférieure à la longueur du fil (égale à 2a). Il faut donc choisir **c strictement inférieur à a.**

Le rapport c/a est appelé excentricité de l'ellipse, souvent notée e.

Cela revient à écrire : c = ae. L'excentricité est donc toujours strictement inférieure à 1. Le cas particulier : c = 0 revient à imaginer les foyers confondus avec le point O : on retrouve le cas particulier du cercle de rayon a. Ainsi, plus l'excentricité est proche de zéro, plus l'ellipse « ressemble » à un cercle, plus l'excentricité augmente, plus l'ellipse « s'aplatit ». À titre d'exemple revenons aux mouvements des centres des planètes décrits dans le référentiel héliocentrique. L'excentricité de l'orbite terrestre est e = 0,0167 ; cette valeur est très faible ; l'orbite est « presque » circulaire comme le montre le schéma n° 3 du document principal. L'excentricité de l'orbite de mars est 5,6 fois plus élevée, bien qu'encore assez faible : e = 0,0933 ; on voit tout de même sur la figure 3 que la distance soleil – mars varie…

Encore quelques définitions :

* La droite passant par les points A et B de l'ellipse constitue le grand axe de l'ellipse. La distance de A à B vaut 2a ; a est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse.

* La droite passant par les points D et O constitue le petit axe de l'ellipse. La distance de O à D est la longueur du demi-petit axe de l'ellipse. Dans le cas particulier où M est en D, nous avons : $d_1 = d_2 = a$. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle (ODF_1) conduit à : $a^2 = c^2 + b^2$ soit :

$$\boxed{b=\sqrt{a^2-c^2}=a\cdot\sqrt{1-e^2}}\ .$$

Autre méthode de construction d'une ellipse.

Considérons un point quelconque Mc du cercle de rayon a et de centre O. Soit E l'angle polaire entre l'axe (OX) et le vecteur $\overrightarrow{OMc}$. Les coordonnées cartésiennes du point Mc sont donc:

$X_{Mc} = a.\cos(E)$; $Y_{Mc} = a.\sin(E)$. Pour obtenir l'ellipse d'excentricité e et de demi grand a, **on fait correspondre à tout point Mc du cercle un point M de l'ellipse ayant même abscisse que Mc mais une ordonnée multipliée par le rapport b/a** (rapport égal à $\sqrt{1-e^2}$ comme démontré au dessus). Les coordonnées cartésiennes du point M sont ainsi :

$X = a.\cos(E)$; $Y = b.\sin(E)$.

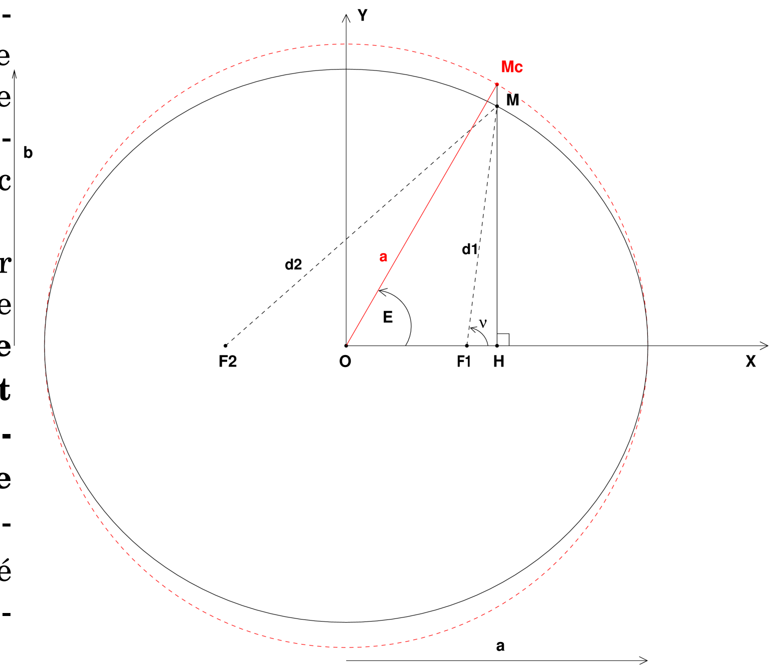


schéma n° 2

Remarque : sachant que, quelle que soit la valeur de E, nous avons :

$$\cos^2(E)+\sin^2(E) \ = \ 1$$

nous obtenons l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2} \ = \ 1$$

Vérifions que cette méthode est bien cohérente avec la définition de l'ellipse donnée initialement. Sachant que les foyers sont à la distance c = ea du centre O, le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles (F_1HM) et (F2HM) conduit à :

$$d_1^2 = (X-e.a)^2+Y^2 \quad \text{et} \quad d_2^2 = (X+e.a)^2+Y^2$$

Ce qui donne pour la première égalité :

$$d_1^2 = a^{2\cdot}\cos^2(E)-2.e.a^{2\cdot}\cos(E)+e^2\cdot a^2+a^2\cdot(1-e^2)\cdot\sin^2(E) \quad .$$

Soit en tenant compte de la relation : $\cos^2(E)+\sin^2(E) = 1$:

$$d_1^2 = a^2-2.e.a.\cos(E)+e^2\cdot a^2\cdot\cos^2(E) \quad .$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$d_1^2 = (a-e.a.\cos(E))^2 \quad \text{; d'où :} \quad d_1 = a\cdot(1-e\cdot\cos(E)) \quad .$$

Le calcul pour d2 se mène de la même façon : il suffit de remplacer e par son opposé. Au final nous obtenons :

$$d_1 = a\cdot(1-e\cdot\cos(E)) \quad \text{et} \quad d_2 = a\cdot(1+e\cdot\cos(E)) \quad .$$

Cela donne bien, quelle que soit la valeur de E, donc quelle que soit la position du point M sur l'ellipse :

$$d_1+d_2 = 2\cdot a \quad .$$

Nous retrouvons la définition de l'ellipse donnée primitivement !

Remarque : il peut être intéressant de repérer le point M de l’ellipse par ses coordonnées polaires (r,ν) où r désigne la distance entre le foyer où se trouve l'astre attracteur (F1 par exemple) et le point M et où ν désigne l'angle entre le grand axe de l'ellipse et la droite (F_1M). On obtient évidemment r = d_1 :

$$r = a\cdot(1-e\cdot\cos(E)) \quad .$$

Pour l'angle ν les définitions de trigonométrie appliquées au triangle (F_1HM) conduisent à :

$$\cos(\nu) = \frac{a.\cos(E)-a.e}{r} = \frac{\cos(E)-e}{1+e.\cos(E)} \quad ; \quad \sin(\nu) = \frac{b.\sin(E)}{r} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\cdot\sin(E)}{1+e.\cos(E)} \quad .$$

$$\tan(\nu) = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\cdot\sin(E)}{\cos(E)-e} \quad .$$

En pratique, on déduit la valeur de ν du calcul de tan(ν) et du signe de sin(ν) identique au signe de sin(E).

Équation polaire de l'ellipse.

Nous avons déjà établi l'équation cartésienne, c'est à dire la relation entre les coordonnées cartésiennes X et Y d'un point M quelconque de l'ellipse. L'équation polaire donne la relation entre les coordonnées r et ν d'un point M quelconque de l'ellipse. L'expression précédente de cos(ν) conduit à :

$$a\cdot\cos(E) = a\cdot e+r\cdot\cos(\nu) \quad .$$

Par substitution dans l'expression de r déjà obtenue : $r = a\cdot(1-e\cdot\cos(E))$, on obtient :

$$r = a-e\cdot(a\cdot e+r\cdot\cos(\nu)) = a\cdot(1-e^2)-e\cdot r\cdot\cos(\nu) \quad ;$$

Soit :

$$r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos(\nu)} \quad .$$

On pose souvent : $p = a\cdot(1-e^2)$; p est appelé : « paramètre de l'ellipse.
D'où l'expression classique de l'équation polaire :

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cdot\cos(\nu)}}.$$

Aire de la surface délimitée par une ellipse.

Imaginons le disque de rayon a, d'aire $\pi\cdot a^2$ que l'on cherche à tapisser de carrés identiques. La surface ainsi recouverte est plus petite bien sûr que le disque (voir schéma n° 3). Imaginons maintenant que l'on choisisse des carrés dont la longueur de chaque côté est extrêmement petite devant le rayon a du disque : la surface « perdue » (colorée en bleu sur le schéma) devient négligeable : l'aire du disque est égale à la somme des aires des petits carrés : $\pi\cdot a^2 = N\cdot l^2$ où N est le nombre de carrés et l la longueur d'un côté de carreau.

Supposons maintenant que l'on transforme chaque petit carré de la façon suivante : sa longueur l est conservée mais sa hauteur est multipliée par le rapport b/a définie précédemment pour l'ellipse. Conserver les dimensions horizontales en multipliant les dimensions verticales par le rapport b/a est la méthode utilisée pour transformer le cercle de rayon a en ellipse : Nos N rectangles tapissent maintenant l'ellipse ! L'aire de ces N rectangles est : $\frac{N\cdot l\cdot l\cdot b}{a} = \frac{\pi\cdot a^2\cdot b}{a} = \pi\cdot a\cdot b$; cette aire est celle de la surface délimitée par l'ellipse.
Conclusion : **l'aire de la surface délimitée par une ellipse est :**

$$\boxed{S = \pi\cdot a\cdot b = \pi\cdot a^2\cdot\sqrt{1-e^2}}.$$

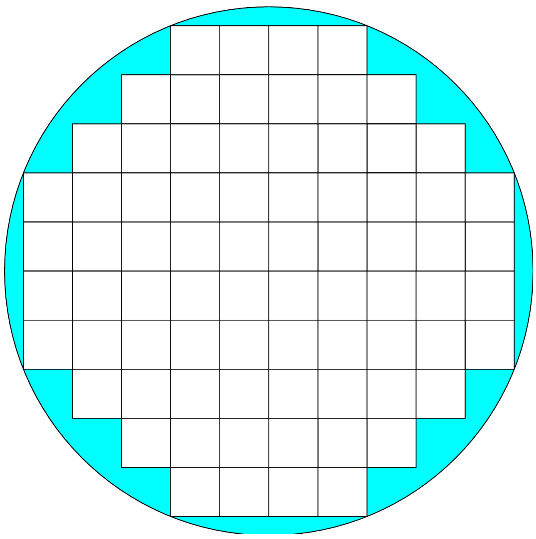


schéma n° 3

Loi des aires.

Attention ! par la suite, la mesure des angles sera exprimée en radians.

Soit un point M se déplaçant sur une ellipses, ses coordonnées polaires étant r et ν. Soit t = 0 la date de passage de M au périgée ; soit s l'aire de la surface balayée par le segment (FM) entre les dates zéro et t (date quelconque) . Supposons que le mouvement de M vérifie la loi des aires : cela signifie que l'aire de la surface balayée augmente proportionnellement à la date t.

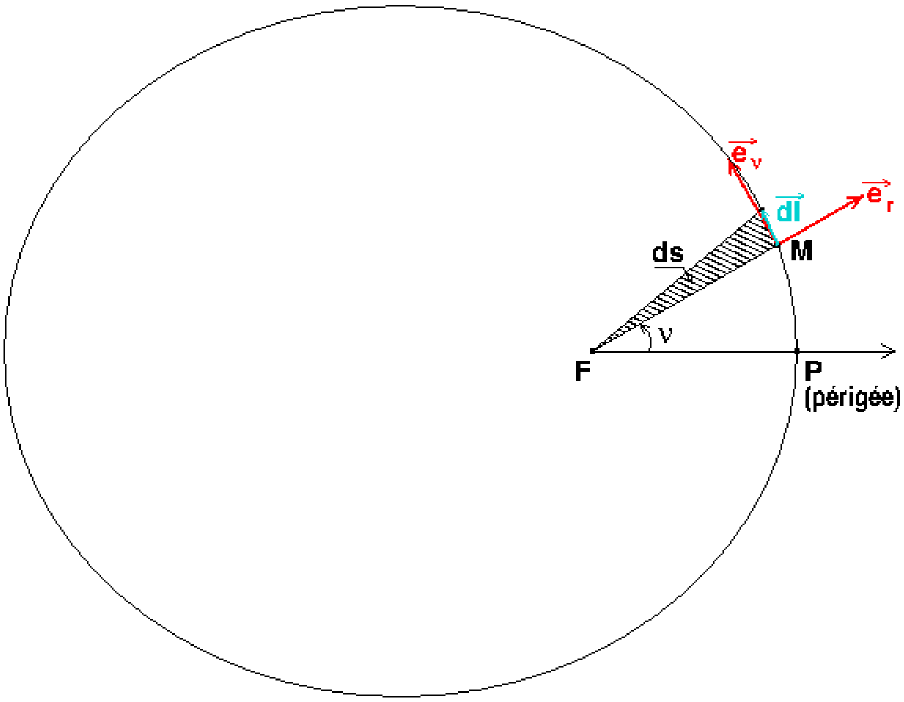
De plus, dans le cas particulier t = T : période du mouvement, l'aire de la surface balayée vaut S = π.a.b . L'aire de la surface balayée entre les date zéro et t peut donc s'écrire : $s = \frac{\pi\cdot a\cdot b}{T}\cdot t$. On appelle vitesse aérolaire de M le nombre dérivé de s par rapport à t :

$$VA = \frac{ds}{dt} \text{ ; soit ici : } VA = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} .$$

Remarque : lorsque VA ne varie pas au cours du temps, ce qui est le cas ici, la vitesse aérolaire représente l'aire de la surface balayée par le segment (FM) chaque seconde.

La loi des aires peut s'énoncer simplement en disant que, lorsqu'elle est vérifiée, la vitesse aérolaire du point M décrivant l'ellipse ne varie pas au cours du temps.

Exprimons maintenant la vitesse aérolaire en fonction des coordonnées polaires de M et de leurs dérivées par rapport au temps. Soit $\overrightarrow{FM} = r \cdot \vec{e}_r$ le vecteur position de M à la date quelconque t, $\vec{e}_r$ étant un vecteur unitaire. Entre les date t et (t + dt), le point M subit un déplacement élémentaire :
$\vec{dl} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\nu \cdot \vec{e}_\nu$ où $\vec{e}_\nu$ désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan de l'ellipse (voir figure ci-contre). L'aire de la surface balayée par le segment (FM) est celle du triangle hachuré sur la figure. Cette valeur est la demi norme du produit vectoriel $\overrightarrow{FM} \wedge \vec{dl} = r^2 \cdot d\nu \cdot \vec{e}_z$ où $\vec{e}_z$ désigne un vecteur perpendiculaire au plan de l'ellipse. La nouvelle expression générale de la vitesse aérolaire est ainsi :



$V_A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\nu}{dt}$ où $\frac{d\nu}{dt}$ représente le nombre dérivée de l'angle polaire par rapport au temps, c'est à dire la vitesse angulaire du point M.

Conclusion : lorsqu'un point M en mouvement elliptique vérifie la loi des aires, le produit de r^2 par la vitesse angulaire est une constante, souvent notée C et appelée constante des aires :

$$\boxed{r^2 \cdot \frac{d\nu}{dt} = C} \text{ ; avec : } \boxed{C = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b}{T}}.$$